

درس مکانیک ساختمان

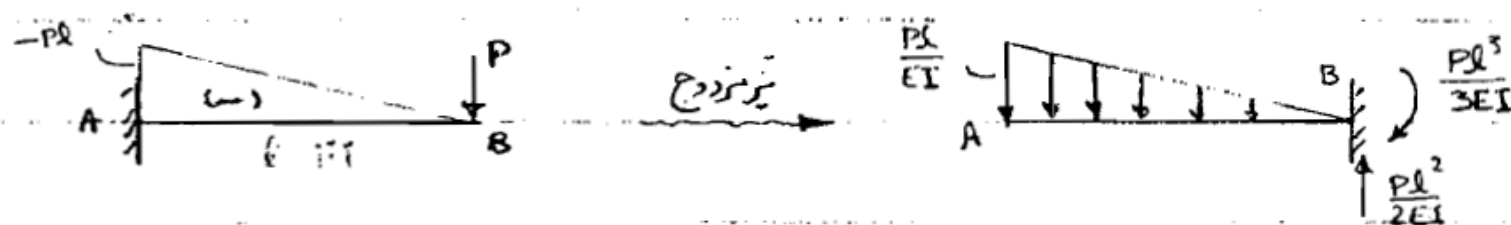
جلسه ششم

مدرس:

مهندس ماهرخ ییژنی

نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۹ - ۹۸

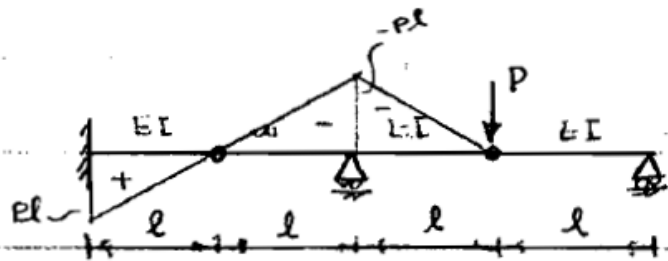
سؤال θ_B و δ_B را در تیر مقابل بدست آورید



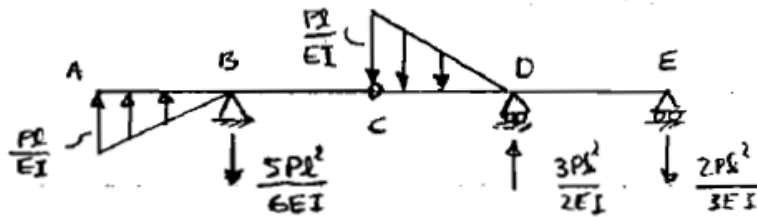
$$\theta_B = v'_B = -\frac{Pl^2}{2EI}, \quad \delta_B = v_B = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

۴ در این روش مقدار جهت θ و δ برای ما مشخص می شود.

مثال 2- δ و θ را در نقاط A، B، C، D و E بدست آورید.



* EI دومی می‌توانست است به این معناست که تیر تغییر شکل نمی‌خواهد داشت.



$$\sum M'_C = 0 \Rightarrow lR'_B + \frac{Pl^2}{2EI} \cdot \frac{5l}{3} = 0$$

$$\Rightarrow -R'_B = \frac{5Pl^2}{6EI}$$

$$\sum M'_C = 0 \Rightarrow lR'_D + 2lR'_E = \frac{Pl^2}{2EI} \cdot \frac{l}{3} \Rightarrow R'_D + 2R'_E = \frac{Pl^2}{6EI}$$

$$\Sigma F_y' = 0 \Rightarrow R_0' + R_E' = \frac{5Pl^2}{6EI} \Rightarrow R_E' = -\frac{2Pl^2}{3EI}, R_D' = \frac{3Pl^2}{2EI}$$

$$\theta_{LB} = v_{LB}' = \frac{Pl^2}{2EI}, \quad \theta_{RB} = v_{RB}' = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{5Pl^2}{6EI} = -\frac{Pl^2}{3EI}$$

$$y_B = M_B' = \frac{Pl^2}{2EI} \cdot \frac{2l}{3} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\theta_C = v_C' = v_{RB}' = -\frac{Pl^2}{3EI} \rightarrow \theta_C = \theta_{RB} \text{ چون } EI \text{ صفت } BC, \text{ است به سبب این } \leftarrow$$

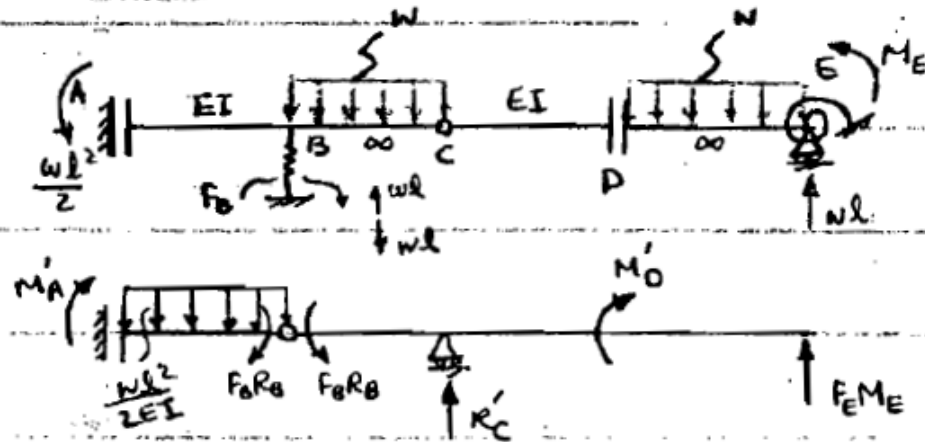
$$\theta_{LD} = v_{LD}' = \frac{2Pl^2}{3EI} - \frac{3Pl^2}{2EI} = -\frac{5Pl^2}{6EI}, \quad \theta_{RD} = v_{RD}' = \frac{2Pl^2}{3EI}$$

$$\delta_D = M_D' = -\frac{2Pl^3}{3EI}$$

$$\theta_E = v_E' = \frac{2Pl^2}{3EI}, \quad \delta_E = 0 \rightarrow \text{نقطه E به سبب این}$$

مثال 3. δ و θ را در نقاط A، B، C و D برای بار آویخته.

$$F_B = \frac{wl^3}{2EI}, \quad F_E = \frac{wl^3}{2EI}$$



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow$$

$$M_A + wl^2 - wl\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -M_A = \frac{wl^2}{2}$$

$$AB: M = -\frac{wl^2}{2}, \quad CD: M = -\frac{wl^2}{2} + wl(l+x) - wl\left(\frac{l}{2}+x\right) = 0$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow M_A' + wlF_B - \frac{wl^3}{3EI}\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_A' = -\frac{wl^4}{4EI}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_E + wl(2l) - wl\left(\frac{3l}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_E = -\frac{wl^2}{2}$$

$$\sum M_B' = 0 \Rightarrow R_C' l - M_D' + \frac{wl^4}{2EI} - \frac{3wl^4}{4EI} = 0 \Rightarrow R_C' l - M_D' = \frac{wl^4}{4EI}$$

$$\sum F_y' = 0 \Rightarrow R_C' = \frac{wl^3}{2EI} + \frac{wl^3}{4EI} = \frac{3wl^3}{4EI} \Rightarrow M_D' = \frac{wl^4}{2EI}$$

$$\theta_A = 0, \quad \delta_A = M_A' = -\frac{wl^4}{4EI}$$

انحرافهای زیر در سله داده شده باشد:

$$w = 3 \text{ t/m}, \quad l = 2 \text{ m}, \quad E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad I = 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\Rightarrow EI = 2 \times 10^{10} \text{ kg.cm}^2 = 2000 \text{ t.m}^2$$

$$\delta_A = M_A' = -\frac{wl^4}{4EI} = -\frac{(3)(2)^4}{4(2000)} = -0.006 \text{ m} = -6 \text{ mm}$$

$$\theta_B = \theta'_B = -\frac{wl^3}{2EI} = -\frac{3(2)^3}{2(2000)} = -0.006 \text{ R}$$

$$\delta_B = \delta'_B = -\frac{wl^4}{2EI} = -\frac{3(2)^4}{2(2000)} = -0.012 \text{ m} = -12 \text{ mm}$$

$$\theta_C = \theta'_C = -\frac{wl^3}{2EI} = -0.006 \text{ R}, \quad \theta_{RC} = \theta'_{RC} = -\frac{wl^3}{2EI} + \frac{3wl^3}{4EI} = 0.003 \text{ R}$$

$$\delta_C = \delta'_C = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} = -\frac{wl^4}{EI} = -\frac{3(16)}{2000} = -0.024 \text{ m} = -24 \text{ mm}$$

$$\theta_D = \theta'_D = \frac{wl^3}{4EI} = \frac{3(8)}{4(2000)} = 0.003 \text{ R}$$

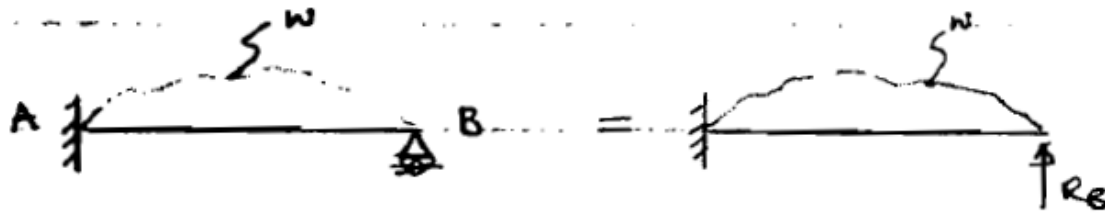
$$\delta_{LO} = \Delta'_{LO} = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{4EI} = -\frac{3wl^4}{4EI} = -\frac{3(3)(16)}{4(2000)} = -0.018 \text{ m}$$

$$\delta_{RO} = \Delta'_{RO} = -\frac{wl^4}{4EI} = -\frac{3(16)}{4(2000)} = -0.006 \text{ m}$$

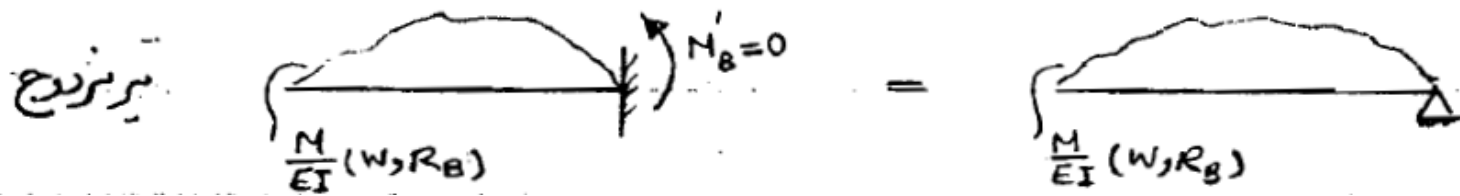
نیز در بریزودج بی بعد است و بعد فکر در بریزودج متر است.

$$\theta_E = v'_E = \frac{wl^3}{3EI} = \frac{3(8)}{3(2000)} = 0.003 \text{ R} \rightarrow \text{دوران درجهت ششانی}$$

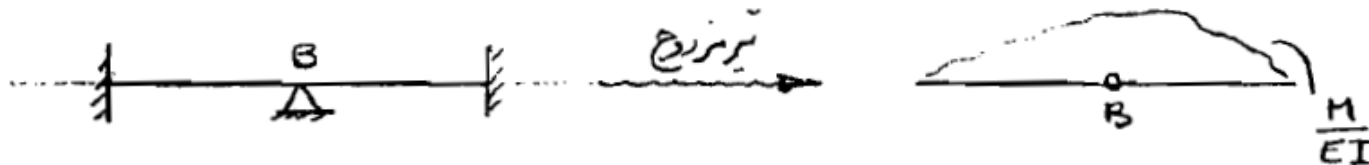
مثال 4) تیر نامعین زیر را حل کنید.
(تیر معین)



۱- تعیین درجه نامعینی ۲- به تعداد درجه نامعینی، مجهول اضافی در تفسیر بگیریم.



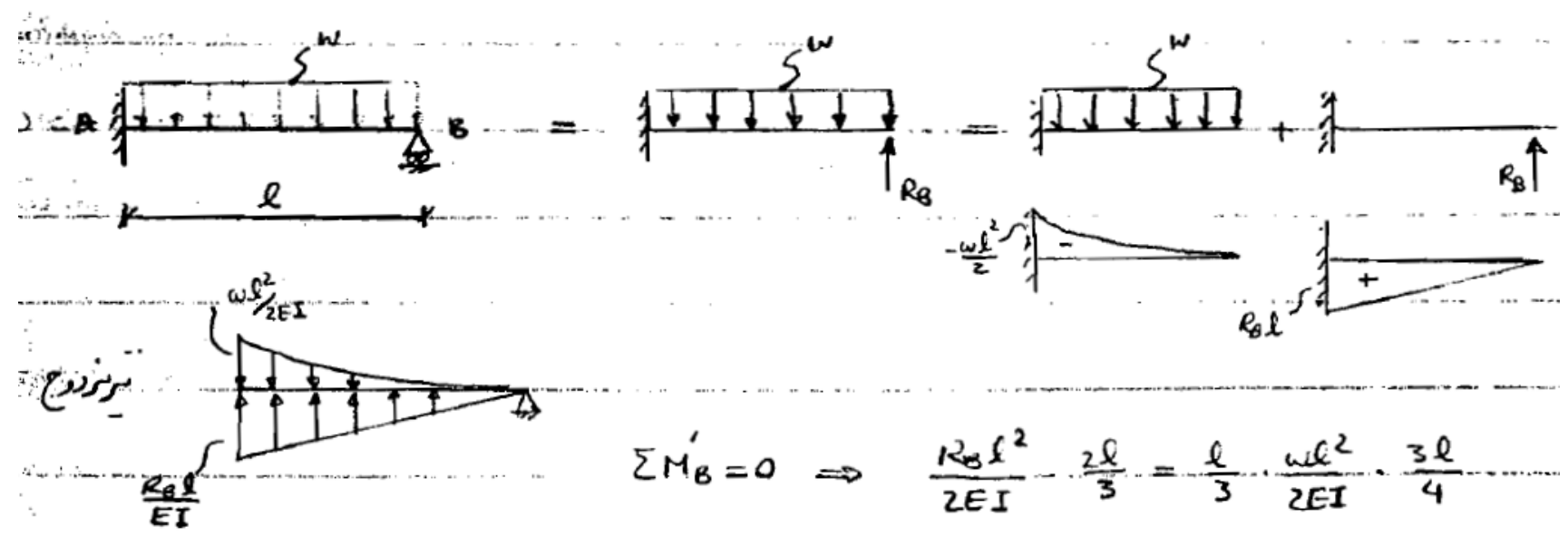
مگر اگر سازه ای یک درجه نامعین باشد، یک درجه ناپایداری شود (در تیر مزدوج) بنابراین یک معادله اضافی برای تعادل می نویسیم و شرایطی برای تعادل تیر قرار می دهیم.



$\Sigma M'_B = 0$ چپ ، $\Sigma M'_B = 0$ است ، $\Sigma F'_y = 0$ حسب شرایط تعادل

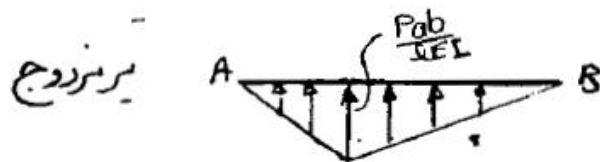
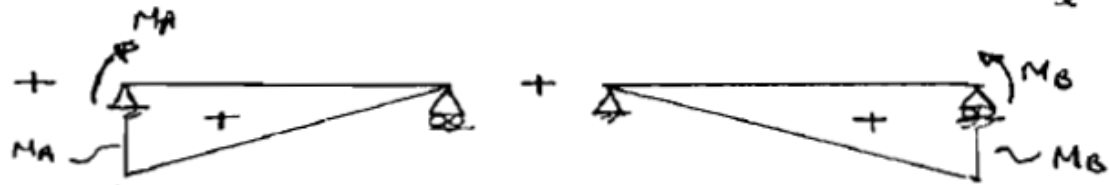
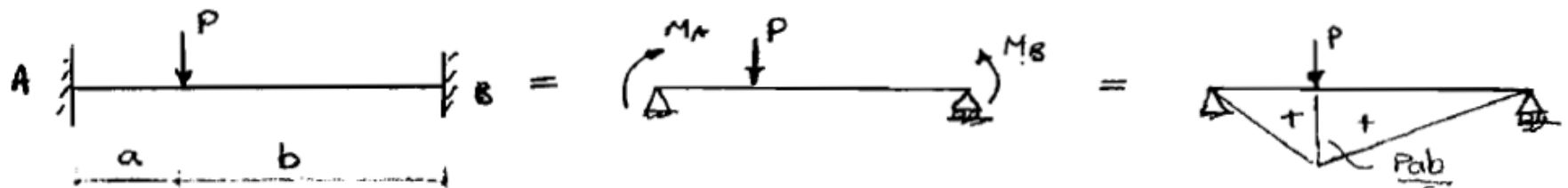
با نوشتن شرطهای تعادل ، مجهول اضافی به دست می آید . (هرچند مجهول اضافی نه داشته باشیم)

مثال ، سازه زیر را با روش تیر مزدوج حل کنید .



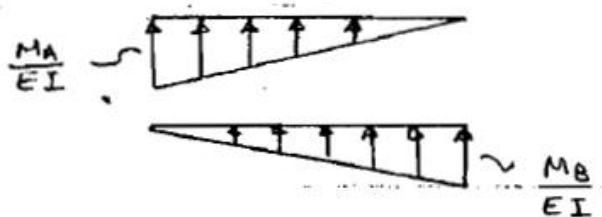
$\Rightarrow \boxed{R_B = \frac{3wl}{8}}$

مثال 12: با استفاده از روش تیر مزدوج، تیر زیر را حل کنید.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{M_A l}{2EI} + \frac{M_B l}{2EI} + \frac{Pab}{2EI} = 0$$

$$\Rightarrow M_A + M_B = -\frac{Pab}{l}$$



$$\sum M'_A = 0 \Rightarrow \frac{M_A l}{2EI} \cdot \frac{l}{3} + \frac{M_B l}{2EI} \cdot \frac{2l}{3}$$

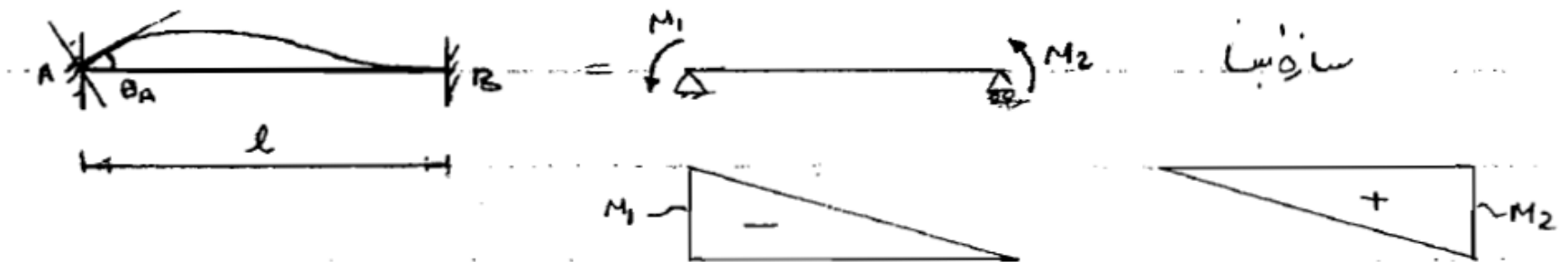
$$+ \frac{Pab}{2EI} \cdot \frac{l+a}{3} = 0$$

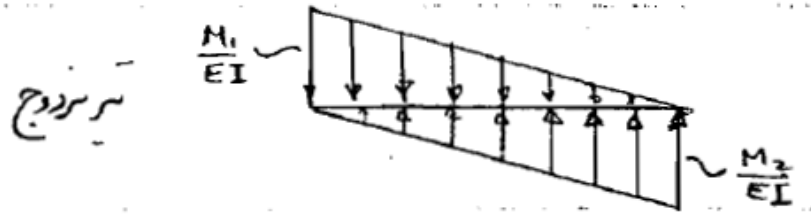
$$\Rightarrow M_A + 2M_B = -\frac{Pab(l+a)}{l^2}$$

$$M_B = -\frac{Pab(l+a)}{l^2} + \frac{Pab}{l} = \frac{Pab}{l} \left(1 - 1 - \frac{a}{l}\right) = -\frac{Pa^2b}{l^2}$$

$$M_A = -\frac{Pab}{l} + \frac{Pa^2b}{l^2} = \frac{Pab}{l} \left(-1 + \frac{a}{l}\right) = -\frac{Pab^2}{l^2}$$

مثال 3) یک تیر دوسره گیر را تحت یک دودان یکجبهه ای قرار دهیم. در آن نیروای رسی شود
با استفاده از روش تیر مزدوج این تیر را حل کنید.
(θ در جهت مثبت باشد)





$$\Sigma M'_A = 0 \Rightarrow \frac{M_1 l}{2EI} \cdot \frac{l}{3} = \frac{M_2 l}{2EI} \cdot \frac{2l}{3}$$

$$\rightarrow M_1 = 2M_2$$

$$\Sigma F'_y = 0 \Rightarrow \theta_A + \frac{M_2 l}{2EI} - \frac{M_1 l}{2EI} = 0 \rightarrow \theta_A - \frac{M_2 l}{2EI} = 0$$

$$\Rightarrow M_2 = \frac{2EI}{l} \theta_A, \quad M_1 = \frac{4EI}{l} \theta_A$$

◀ اگر تکیه‌گاه B را تحت دوران قرار می‌داریم، داریم:



$$M_1 = \frac{2EI}{l} \theta_B, \quad M_2 = \frac{4EI}{l} \theta_B$$

✦ حال اگر تکیه‌گاه‌ها به اندازه δ جابه‌جا شوند، داریم: (در جهت مثبت مثبت)



$$M_1 = M_2 = -\frac{6EI\delta}{l^2}$$

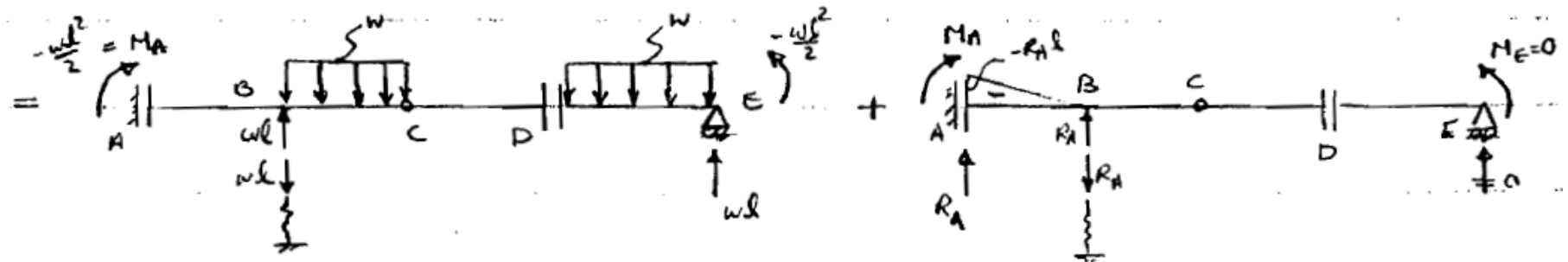
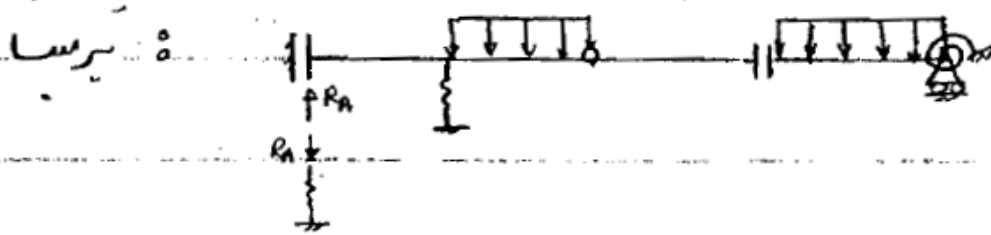
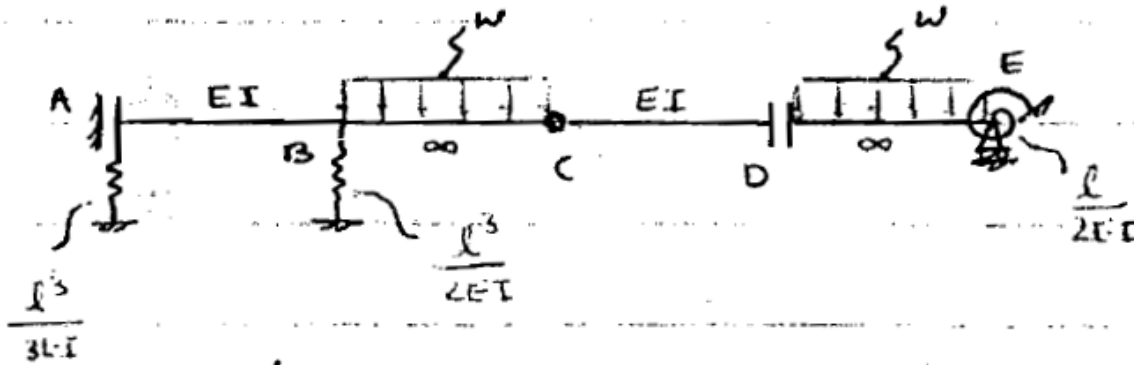
* به‌طور کلی اگر تکیه‌گاه‌ها تحت دوران و یا جابه‌جایی قرار گیرند فرمول‌های زیر برای تکیه‌گاه‌ها به‌دست می‌آید:

$$M_1 = \frac{2EI}{l} (2\theta_1 + \theta_2 - 3\frac{\delta}{l})$$

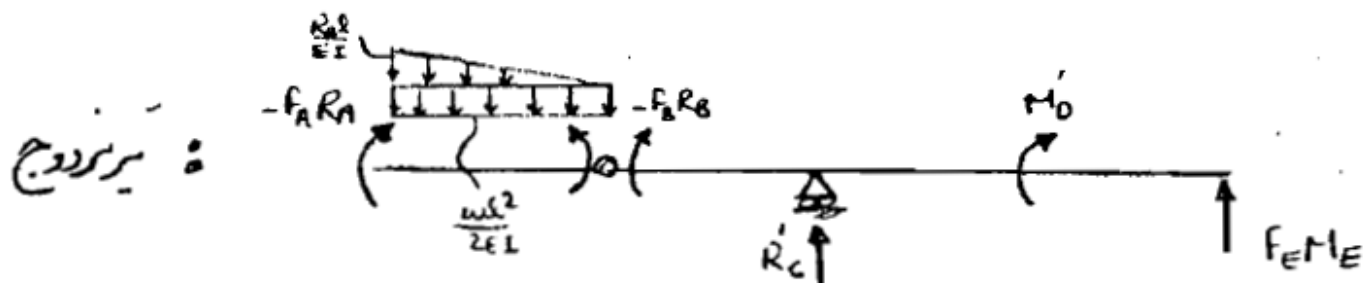
$$M_2 = \frac{2EI}{l} (\theta_1 + 2\theta_2 - 3\frac{\delta}{l})$$

→ معادلات شیب-افت

مثال (4) تیر زیر را با استفاده از روش تیر مزدوج حل کنید.



$$\sum M_c = 0 \Rightarrow M_A - R_A l + 2R_A l = 0 \Rightarrow M_A = -R_A l$$



$$-F_B R_B = -\frac{l^3}{2EI} (wl - R_A) \quad , \quad F_E M_E = \frac{l}{2EI} \left(-\frac{wl^2}{2}\right) = -\frac{wl^3}{4EI}$$

$$\sum M'_B = 0 \Rightarrow \frac{R_A l^3}{3EI} - \frac{l^3}{2EI} (wl - R_A) + \frac{wl^3}{2EI} \cdot \frac{l}{2} + \frac{R_A l^2}{2EI} \cdot \frac{2l}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2R_A l^3}{3EI} + \frac{R_A l^3}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} + \frac{wl^4}{4EI} = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{3wl}{14}}$$

$$\sum F'_y = 0 \Rightarrow R'_c = \frac{wl^3}{2EI} + \frac{R_A l^2}{2EI} + \frac{wl^3}{4EI} \Rightarrow R'_c = \frac{6wl^3}{7EI}$$

$$\sum \bar{M}'_B = 0 \Rightarrow R'_C l - M'_D - \frac{wl^3}{4EI} (3l) + \frac{l^3}{2EI} (wl - R_A) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6wl^3}{7EI} (l) - M'_D - \frac{3wl^4}{4EI} + \frac{l^3}{2EI} \left(\frac{11wl}{14} \right) = 0 \Rightarrow M'_D = \frac{wl^4}{2EI}$$

$$\delta_A \neq M_A = -\frac{wl^4}{14EI}, \quad \theta_B = v'_B = -\frac{6wl^3}{7EI} + \frac{wl^3}{4EI} = -\frac{17wl^3}{28EI}$$

$$\delta_B = M'_B = -\frac{11wl^4}{28EI}, \quad \theta_{LC} = v'_{LC} = v'_B = -\frac{17wl^3}{28EI}$$

$$\theta_{RC} = v'_{RC} = \frac{wl^3}{4EI}, \quad \delta_C = M'_C = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} = -\frac{wl^4}{EI}$$

$$\theta_D = v'_D = \frac{wl^3}{4EI}, \quad \delta_{LD} = M'_{LD} = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{4EI} = -\frac{3wl^4}{4EI}$$

$$\delta_{RO} = -\frac{wl^4}{4EI}, \quad \theta_E = v'_E = \frac{wl^3}{4EI}$$

$\Delta A R_A = \frac{\theta R_A l^3}{3EI}$
 (نقطة A، مع؟)

$$\sum M'_B = 0 \Rightarrow \frac{R_A l^3}{3EI} - \frac{l^3}{2EI} (wl - R_A) + \frac{wl^3}{2EI} \times \frac{l}{2} + \frac{R_A l^2}{2EI} + \frac{2l}{3} = 0$$

$$\frac{2R_A l^3}{3EI} + \frac{R_A l^3}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} + \frac{wl^4}{4EI} = 0 \Rightarrow \frac{7R_A l^3}{6EI} = \frac{wl^4}{4EI} \Rightarrow R_A = \frac{3wl}{14}$$

$$\sum F'_y = 0 \Rightarrow R'_C = \frac{wl^3}{2EI} + \frac{R_A l^2}{2EI} + \frac{wl^3}{4EI} \Rightarrow R'_C = \frac{24}{28} \frac{wl^3}{EI} = \frac{6wl^3}{7EI}$$

$$\sum M'_B = 0 \Rightarrow R'_C l + M'_D - \frac{wl^3}{4EI} (3l) + \frac{l^3}{2EI} \times (wl - R_A) = 0$$

$$\Rightarrow M'_D = \frac{wl^4}{2EI}$$

$$\delta_A = \Delta'_A = -\frac{wl^4}{14EI}$$

$$\theta_A = 0 \quad \theta_B = \Delta'_B = \frac{6wl^3}{7EI} + \frac{wl^3}{4EI} = \frac{-17wl^3}{28EI}$$

(دفعته في اليمين)

$$\delta_B = \Delta'_B = -\frac{11wl^4}{28EI}$$

$$\theta_{LC} = \Delta'_{LC} = \Delta'_B = \frac{-17wl^3}{28EI}, \quad \theta_{RC} = \Delta'_{RC} = \frac{wl^3}{4EI}$$

اليمين

$$\delta_C = \Delta'_C = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} = -\frac{wl^4}{EI}$$

$$\theta_D = \Delta'_D = \frac{wl^3}{4EI} \quad \delta_{LD} = \Delta'_{LD} = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{4EI} = -\frac{3wl^4}{4EI}$$

$$\delta_{RD} = \Delta'_{RD} = -\frac{wl^4}{4EI}, \quad \theta_E = \Delta'_E = \frac{wl^3}{4EI}$$